
KRUMMLINIGE KOORDINATEN

[P28] *Fluss durch eine Fläche*

Gegeben ist ein symmetrisch um den Ursprung liegender Zylinder mit Radius R und Höhe h sowie das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = \alpha \, \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}$.

(a) Parametrisieren Sie die Mantelfläche S des Zylinders. Geben Sie das zugehörige vektorielle Flächenelement an.

(b) Geben Sie zur Berechnung des Flusses durch die Mantelfläche,

$$\Phi_{\text{Mantel}} = \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} \,,$$

den Integranden an und berechnen Sie Φ_{Mantel}. *Hinweis*: Wenn Sie die Ableitung von $x/\sqrt{1+x^2}$ berechnen, sollte Ihnen dies bei der Auswertung des Integrals nützen.

(c) Wie groß ist Φ_{Mantel} als Funktion von $\sin\chi = \dfrac{\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$?

(d) Berechnen Sie nun den Fluss durch die gesamte Oberfläche einschließlich Deckel und Boden. Welche Beobachtung machen Sie, und was bedeutet das anschaulich?

[P29] *Koordinatenwechsel*

Zwei feste nicht kollineare und nicht normierte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene definieren Parallelogramm-Koordinaten (u,v) über $\vec{r}(u,v) = \vec{a}\,u + \vec{b}\,v \doteq (a_1\,u + b_1\,v, a_2\,u + b_2\,v)^{\mathsf{T}}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurvenscharen $\vec{r}(u,v_0)$ und $\vec{r}(u_0,v)$ mit festem v_0 bzw. u_0.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, ihre Determinante sowie die Metrik $G = J^{\mathsf{T}}J$.

(c) Geben Sie Linien- und Flächenelement sowie $v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$ in den neuen Koordinaten an.

(d) Formulieren Sie für eine Bahnkurve $\mathcal{C} \ni \vec{r}(u(t),v(t))$ die Bogenlänge $s(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}s$ und die Wirkung $w(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{p}$ mit $\vec{p} = m\,\dot{\vec{r}}$.

[P30] *Eigenschaften der δ-Distribution*

Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x)\,, \quad$ wobei $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \geq 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0\,. \end{cases}$

(b) $f(x)\,\delta''(x) = f(0)\,\delta''(x) - 2f'(0)\,\delta'(x) + f''(0)\,\delta(x)\,.$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(\theta(t)\sin(\omega\,t)\big) = -\omega^2\,\theta(t)\sin(\omega\,t) + \omega\,\delta(t)\,.$